

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 10 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
15. Januar 2022

Aufgabe 1 (1 + 1 + 4 + 4 Punkte). Gegeben sei die komplexe Zahl

$$\omega := \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$$

sowie $\zeta_+ = \omega + \omega^4$ und $\zeta_- = \omega^2 + \omega^3$.

(i) Zeigen Sie: $2 \operatorname{Re} \omega = \zeta_+$ und $2 \operatorname{Re}(\omega^2) = \zeta_-$.

(ii) Veranschaulichen Sie sich ω^k für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und $\zeta_{\pm}/2$ mit einer Skizze in der komplexen Zahlenebene, in der auch der Einheitskreis S^1 eingezeichnet ist.

Bemerkung: Die Zahlen ω^k , $k = 1, \dots, 5$ heißen *fünfte Einheitswurzeln*.

(iii) Zeigen Sie: $\zeta_+ + \zeta_- = -1$ und $\zeta_+ \cdot \zeta_- = -1$. Folgern Sie: Das Polynom $x^2 + x - 1$ besitzt die Linearfaktorzerlegung

$$x^2 + x - 1 = (x - \zeta_+)(x - \zeta_-).$$

Insbesondere gilt $\zeta_{\pm}^2 + \zeta_{\pm} - 1 = 0$ und $\zeta_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(iv) Zeigen Sie:

$$\omega = \frac{\zeta_+}{2} + i \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

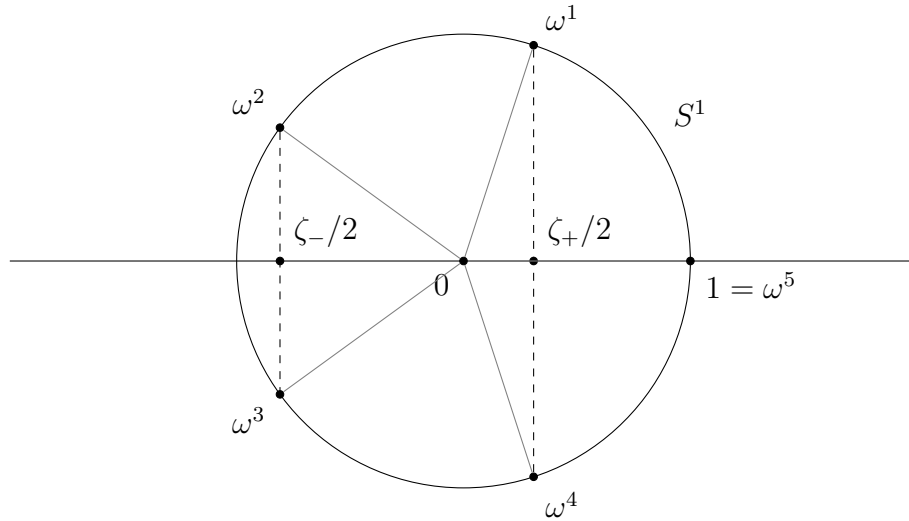
Welche Formeln für $\cos(72^\circ)$ und $\sin(72^\circ)$ erhalten Sie hieraus?

Lösung. (i) Es gilt $\omega^4 = e^{8\pi i/5} = e^{-2\pi i/5} = \bar{\omega}$, also

$$\zeta_+ = \omega + \omega^4 = \omega + \bar{\omega} = 2 \operatorname{Re} \omega.$$

Die zweite Identität folgt analog.

(ii) Eine mögliche Skizze ist die folgende:



(iii) Mit der geometrischen Summenformel und $\omega^5 = 1$ folgt

$$\zeta_+ + \zeta_- + 1 = \sum_{k=0}^4 \omega^k = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0,$$

oder äquivalent $\zeta_+ + \zeta_- = -1$. Wegen $\omega^6 = \omega^5 \cdot \omega = \omega$ und $\omega^7 = \omega^5 \cdot \omega^2 = \omega^2$ erhalten wir weiter

$$\zeta_+ \cdot \zeta_- = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = \sum_{k=0}^4 \omega^k - 1 = -1.$$

Zusammen genommen folgt

$$(x - \zeta_+)(x - \zeta_-) = x^2 - (\zeta_+ + \zeta_-) \cdot x + \zeta_+ \cdot \zeta_- = x^2 + x - 1.$$

Insbesondere sind also ζ_+ und ζ_- Nullstellen des Polynoms $x^2 + x - 1$. Aus der Tatsache $\cos(2\pi/5) > \cos(4\pi/5)$ folgt $\zeta_+ > \zeta_-$ und damit durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

(z.B. mit der Mitternachtsformel) die explizite Darstellung $\zeta_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(iv) Wegen $\operatorname{Re} \omega = \zeta_+/2$ und $1 = |\omega|^2 = (\operatorname{Re} \omega)^2 + (\operatorname{Im} \omega)^2$ erhalten wir

$$\operatorname{Im} \omega = \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2},$$

und somit

$$\omega = \operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega = \frac{\zeta_+}{2} + i \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2}.$$

Einsetzen von $\zeta_+ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ liefert die zweite Identität. Aus dieser erhalten wir zudem

$$\cos(72^\circ) = \cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin(72^\circ) = \sin(2\pi/5) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

□

Aufgabe 2 (10 Punkte). Beweisen Sie folgende Halbierungs-Formeln für die trigonometrischen Funktionen:

$$(i) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{für } |\alpha| \leq \pi,$$

$$(ii) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}} \quad \text{für } |\alpha| \leq \pi/2,$$

$$(iii) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\tan \alpha}{1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \text{für } |\alpha| < \pi/2.$$

Lösung. (i) Wir benutzen das aus der Vorlesung bekannte Additionstheorem

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

mit $x = y = \alpha/2$ sowie die Identität $\sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos^2(\alpha/2)$ und erhalten

$$\cos \alpha = \cos(\alpha/2 + \alpha/2) = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = 2 \cos^2(\alpha/2) - 1.$$

Umstellen und Wurzelziehen ergibt

$$|\cos(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Für $|\alpha| \leq \pi$ ist $\cos(\alpha/2) \geq 0$, also kann man die Betragsstriche weglassen und erhält die gewünschte Identität.

(ii) Unter Verwendung von Teilaufgabe (i) und der aus der Vorlesung bekannten Formel

$$\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$$

angewendet auf $x = \alpha/2$ erhalten wir

$$\sin(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha)}{2 \cos(\alpha/2)} = \frac{\sin \alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}}.$$

Im letzten Schritt haben wir $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ für $|\alpha| \leq \pi/2$ verwendet.

(iii) Mit Aufgabenteilen (i) und (ii) erhalten wir zunächst für $|\alpha| < \pi/2$

$$\tan(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\sin \alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \alpha}} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Nun folgt aus $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dass

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

und damit

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}},$$

was zu zeigen war. □

Aufgabe 3 (10 Punkte). Berechnen Sie ohne Taschenrechner die exakten Werte von $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.

Hinweis: Aufgaben 1 und 2 können nützlich sein.

Lösung. Wir starten mit $x = \pi/3$ und gehen ähnlich vor wie in Aufgabe 1. Für

$$\omega := e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)$$

ist

$$0 = \omega^3 + 1 = (\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1),$$

also wegen $\omega \neq -1$

$$\omega^2 - \omega + 1 = 0.$$

Aber $\omega^2 = e^{2i\pi/3} = e^{i\pi} e^{-i\pi/3} = -\bar{\omega}$, also folgt aus obiger Gleichung

$$1 = \omega + \bar{\omega} = 2 \operatorname{Re} \omega = 2 \cos(\pi/3).$$

Es folgt $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/3)} = \sqrt{3}/2$ und $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Als nächstes zu $x = \pi/4$. Wir wissen schon, dass $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$. Mit der Formel aus Aufgabe 2 folgt

$$\cos(\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/2)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

also auch $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ und $\tan(\pi/4) = 1$.

Für $x = \pi/5$ benutzen wir den bekannten Wert $\cos(2\pi/5)$ aus Aufgabe 1 und wieder Aufgabe 2:

$$\cos(\pi/5) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\pi/5)}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 3}{8}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 6}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sin(\pi/5) &= \sqrt{1 - \cos^2(\pi/5)} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}, \\ \tan(\pi/5) &= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Es verbleibt, die Werte für $x = \pi/6$ zu berechnen. Aber auch hier können wir einfach wieder Aufgabe 2 und die bisher berechneten Werte benutzen:

$$\cos(\pi/6) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/3)}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Wertetabelle:

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

□

Aufgabe 4 (4+4+2 Punkte). Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := nx - \lfloor nx \rfloor$. Hierbei bezeichnet $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion, d.h. $\lfloor y \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich y . Zeigen Sie:

- (i) Falls x rational ist, so hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur endlich viele Häufungspunkte.

Hinweis: Schreiben Sie $x = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $b > 0$ und zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Falle $x \neq 0$ gegeben ist durch

$$\left\{ 0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \dots, \frac{b-1}{b} \right\}.$$

- (ii) Falls x irrational ist, so ist jede reelle Zahl $c \in [0, 1]$ Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Hinweis: Sie können den Satz von Bolzano-Weierstraß verwenden.

Nun sei $a_n := e^{2\pi i n x}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

- (iii) Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. (i) Wir folgen dem Hinweis. Sei $x \in \mathbb{Q}$, dann können wir $x = a/b$ schreiben mit $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $b > 0$. Wir nehmen $a \neq 0$ an, der Fall $x = a = 0$ ist trivial. Division mit Rest liefert

$$na = k_n b + r_n \tag{1}$$

für passende $k_n, r_n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r_n < b$. Dann ist $na/b = k_n + r_n/b$ und damit

$$x_n = n \frac{a}{b} - \left\lfloor n \frac{a}{b} \right\rfloor = \frac{r_n}{b}. \tag{2}$$

Nun behaupten wir, dass für $n, m \in \{1, \dots, b\}$ die Folgenglieder x_n, x_m genau dann gleich sind, wenn $n = m$. In der Tat: Angenommen $x_n = x_m$, so ist wegen (2) $r_n = r_m$. Dann folgt mit (1)

$$na - k_n b = ma - k_m b \quad \Leftrightarrow \quad a(n - m) = b(k_n - k_m).$$

Es folgt $a \mid b(k_n - k_m)$ und wegen Teilerfremdheit von a und b , dass $a \mid (k_n - k_m)$. Sei $l \in \mathbb{Z}$ mit $la = k_n - k_m$. Wir schließen

$$a(n - m) = bla \quad \Leftrightarrow \quad (n - m) = bl.$$

Aber $-(b-1) \leq n-m \leq b-1$, also ist die einzige mögliche Lösung der obigen Gleichung $l=0$. Es folgt $n=m$, wie behauptet. Aus der Behauptung und Gleichung (2) folgt

$$\{x_1, \dots, x_b\} = \left\{0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}\right\}. \quad (3)$$

Ferner gilt aber für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\lfloor na/b + a \rfloor = \lfloor na/b \rfloor + a$ (leichte Übung) und somit

$$x_{n+b} = (n+b)\frac{a}{b} - \left\lfloor (n+b)\frac{a}{b} \right\rfloor = n\frac{a}{b} + a - \left\lfloor n\frac{a}{b} \right\rfloor - a = x_n,$$

was zeigt, dass jedes Element der Menge (3) ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist und den Beweis abschließt.

(ii) Sei $c \in [0, 1]$. Wir stellen zunächst einige Vorüberlegungen an, bevor wie die eigentliche Aussage beweisen, dass c ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Die Abbildung $n \mapsto x_n$ ist injektiv, denn aus $n \neq m$ und $x_n = x_m$ folgt

$$x = \frac{\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor}{n - m} \in \mathbb{Q},$$

aber x ist nach Annahme irrational. Weiter besitzt die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $x_n \in [0, 1[$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt. Insbesondere existieren zu $K, N \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen n, m mit $n - m \geq K$ und

$$0 < |x_n - x_m| < \frac{1}{N}. \quad (4)$$

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $x_n > x_m$, sonst vertauschen wir n und m . Sei $M \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl mit $M(x_n - x_m) \leq 1$. Aufgrund der Irrationalität von x gilt sogar

$$M(x_n - x_m) < 1. \quad (5)$$

Da $c \in [0, 1]$, finden wir ein $j \in \{0, \dots, M-1\}$ mit

$$c \in \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right]. \quad (6)$$

Weil zudem

- Die Länge des Intervalls $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right]$ gleich $\frac{1}{N}$ und
- Für jedes $l \in \mathbb{N}$ der Abstand von $l(x_n - x_m)$ und $(l+1)(x_n - x_m)$ wegen (4) kleiner als $\frac{1}{N}$ ist,

folgt, dass

$$k(x_n - x_m) \in \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right] \quad (7)$$

für ein $k \in \{1, \dots, M\}$. Nun folgt aus (5) auch

$$0 < k(x_n - x_m) < 1,$$

also ist

$$\begin{aligned}
k(x_n - x_m) &= k(x_n - x_m) - \lfloor k(x_n - x_m) \rfloor \\
&= k(nx - mx) - k(\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor) - \lfloor k(nx - mx) - k(\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor) \rfloor \\
&= k(nx - mx) - \lfloor k(nx - mx) \rfloor = x_{k(n-m)}.
\end{aligned}$$

Hier haben wir $\lfloor y + a \rfloor = \lfloor y \rfloor + a$ für $y \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{Z}$ benutzt. Schlussendlich erhalten wir mit (6) und (7), dass

$$|x_{k(n-m)} - c| < \frac{1}{N}.$$

Nun zum Beweis der eigentlichen Aussage. Sei $\varepsilon > 0$ und $K \in \mathbb{N}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N < \varepsilon$. Dann gibt es nach obigen Vorüberlegungen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n - m \geq K$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{k(n-m)} - c| < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Wegen $k(n - m) \geq K$ zeigt dies, dass c ein Häufungspunkt der Folge ist. Das war zu zeigen.

(iii) Die Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist surjektiv und stetig. Weiter ist für $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) = e^{2\pi i (nx - \lfloor nx \rfloor)} = e^{2\pi i nx} e^{-2\pi i \lfloor nx \rfloor} = e^{2\pi i nx} = a_n.$$

Es folgt, dass $f(c)$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, wenn c ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Umgekehrt gilt: Ist $y \in S^1$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann existiert ein $c \in [0, 1]$ mit $f(c) = y$ und c ist ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mit den vorherhigen Aufgabenteilen schließen wir: Für $x = a/b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $b > 0$ ist die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\left\{ 1, f\left(\frac{1}{b}\right), f\left(\frac{2}{b}\right), \dots, f\left(\frac{b-1}{b}\right) \right\}.$$

Für irrationale x ist jedes $y \in S^1$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □